5.1.2 Vergleich: Federpendel mit Fadenpendel

******

1 Motivation

Dieser Versuch zeigt, dass die Schwingungen von Feder- und Fadenpendel ganz analog verlaufen: In beiden Fällen wird die Bewegung durch die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators beschrieben! Durch eine geignete Auswahl der Fadenlänge und der Federkonstante erreicht man, dass Feder- und Fadenpendel im Gleichtakt schwingen.

Ein sehr empfehlenswerter Versuch!

2 Theorie

2.1 Fadenpendel

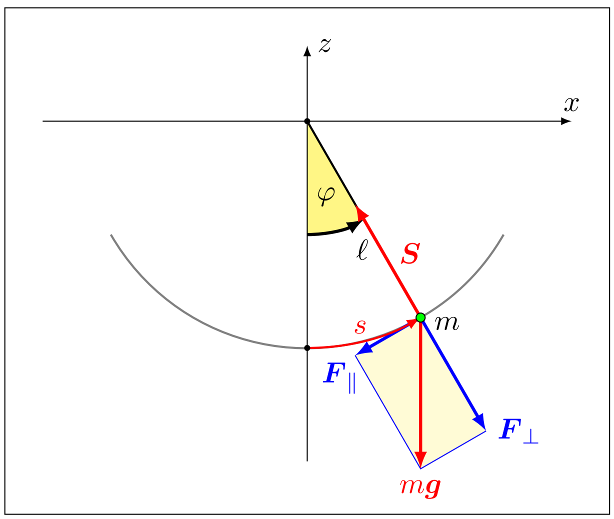

Abbildung 1: Mathematisches Pendel.

Wir betrachten einen Massenpunkt der Masse m, welcher an einem masselosen Faden der Länge ℓ an einem Punkt drehbar aufgehängt ist. Reibungskräfte am Drehpunkt sowie Luftwiderstand vernachlässigen wir. Damit wirken die Schwerkraft $m\boldsymbol{g}$ und die Seilkraft $\boldsymbol{S}$. Einen solchen idealisierten Aufbau nennt man das mathematische Pendel (siehe Abb. 1). Sei φ der Winkel zwischen dem Faden und der Vertikalen. Zur Herleitung der Schwingungsgleichung wenden wir den Satz von Newton an:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \tag{1}$$

Die Seilzugkraft $\boldsymbol{S}$ hebt die Wirkung der zur Bahn senkrechten Komponente $\boldsymbol{F}_\perp$ der Schwerkraft auf:

$$\boldsymbol{S} + \boldsymbol{F}_\perp = 0 \tag{2}$$

Damit wird der Massenpunkt m vom Faden auf eine Kreisbahn mit Radius ℓ gezwungen, da die von der Schwerkraft verursachte Beschleunigung nur eine Komponente tangential zu dieser Kreisbahn hat.

Sei s die vom Tiefpunkt des Pendels aus gemessene Bogenlänge, dann finden wir

$$m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -mg\ell \sin\varphi\,, \tag{3}$$

und, da die Bogenlänge $s = \ell\varphi$ ist,

$$m\ell\frac{\mathrm{d}^2 \varphi}{\mathrm{d}t^2} = -mg \sin\varphi \tag{4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 \varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{\ell}\sin\varphi = 0 \tag{5}$$

Für kleine Auslenkungen gilt die Näherung $\sin\varphi \approx \varphi$, so dass man schliesslich die Differentialgleichung

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 \varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0} \tag{6}$$

erhält. Es fällt auf, dass die Bewegung des Pendels unabhängig von der Masse m ist, die sich ja aus aus der Gleichung herausgekürzt hat! Es handelt sich hier um eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Dies ist die Gleichung des harmonischen Oszillators:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0 \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \tag{7}$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$\varphi(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t \tag{8}$$

Das Pendel beschreibt also eine harmonische Schwingung mit der Periode

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}} \tag{9}$$

Die Periode ist demnach unabhängig von der Masse des Pendels!

2.2 Federpendel

Das Federpendel (Federkonstante k, Masse m) sei an der Decke aufgehängt (siehe Abb. 2). Durch die Gewichtskraft mg wird die Feder gedehnt und erreicht die neue Gleichgewichtslage $x = 0$. Eine Auslenkung um x bewirkt die rücktreibende Kraft

$$F = -kx \tag{10}$$

Nach Newton gilt:

$$m\ddot{x} = -kx \tag{11}$$

Dies ist wiederum die Gleichung des harmonischen Oszillators:

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}} \tag{12}$$

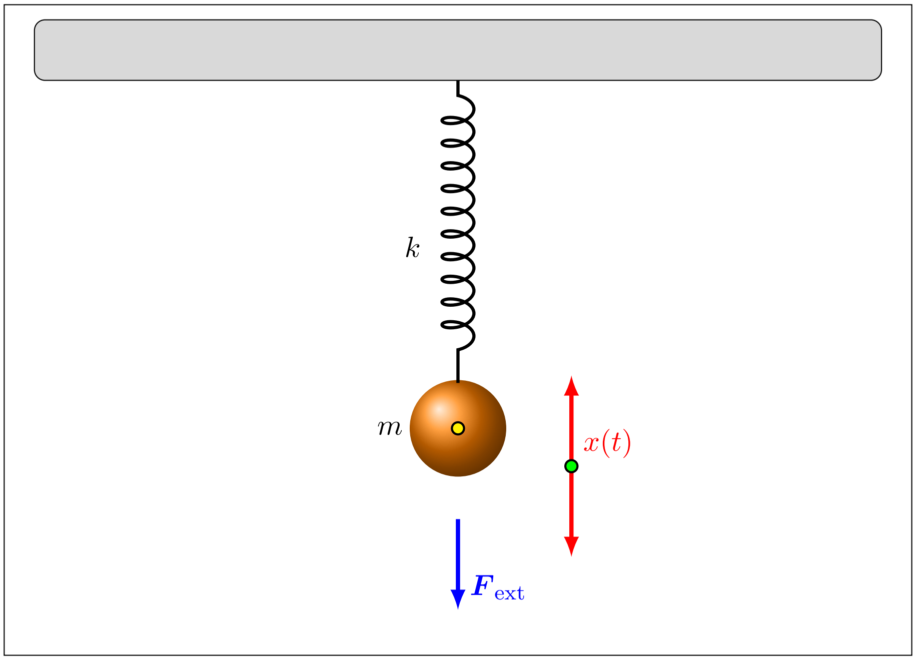

Abbildung 2: Federpendel

3 Experiment

Der Versuchsaufbau ist in Abb. 3 wiedergegeben.

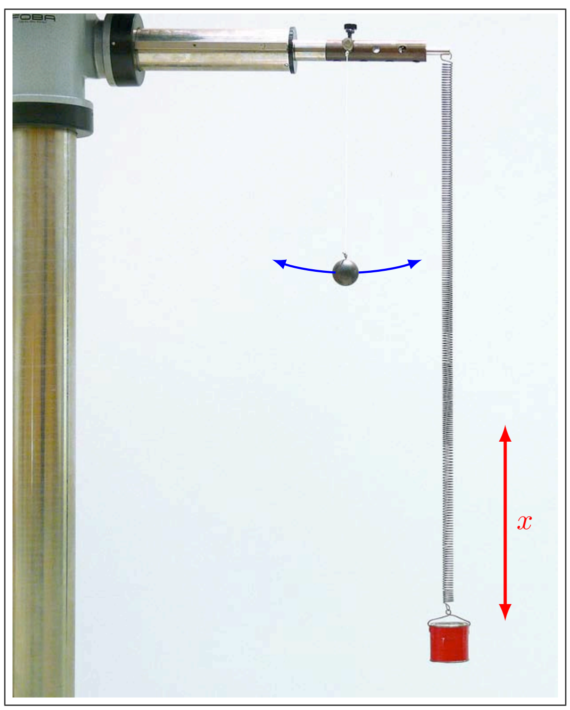

Abbildung 3: Fadenpendel und Federpendel